

222	Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Propriétés.	Lien intégrale-dérivée	Monier MPSI
-----	--	------------------------	-------------

Le rapport de jury demande de mettre en avant dans cette leçon le lien avec la primitive.

Prop. 10: $F : I \rightarrow K$, $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f$ est continue sur I ,

(I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un pt, mais pas nécessairement fermé)

C^1 par mcx sur I , dérivable en tt point x_1 de I où f est continue, et dans ce cas $F'(x_1) = f(x_1)$.

Def.3: Soient $f, \phi : I \rightarrow K$ deux applications.

On dit que ϕ est **une primitive** de f sur I ssi:

ϕ est dérivable sur I et $\phi' = f$.

Th.2: Soit $f : I \rightarrow K$ continue. Alors:

1) $\forall x_0 \in I$, $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f$ est une primitive de f sur I .

2) Pour toute primitive ϕ_0 de f sur I , l'ensemble des primitives de f sur I est: $\{\phi_0 + \lambda ; \lambda \in K\}$.

I. Outils

Dérivée définie comme limite du taux de variation.

Relation de Chasles sur les intégrales.

Traduction de la continuité en un point par sa définition: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\Delta x < \eta \Rightarrow \Delta f(x) < \varepsilon$.

Travail sur "tous les segments inclus dans I " pour se ramener à un segment à partir d'un intervalle qcq.

II. Développement

A. Démonstration de la propriété 10.

On travaille d'abord dans le voisinage d'un point de continuité pour f , puis on étend le caractère C^1 de f grâce au caractère continu par morceaux de f .

a) Montrons tout d'abord que F est dérivable en x_1 avec $F'(x_1) = f(x_1)$.

Soit $x_1 \in I$ tel que f soit continue en x_1 .

On va démontrer que $F'(x_1) = f(x_1)$ en étudiant la différence entre le tx. de var. de F en x_1 et $f(x_1)$, et en montrant qu'il $\rightarrow 0$.

Pour tout $x \in I - \{x_1\}$, on a:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\
 &= \frac{1}{|x - x_1|} \cdot \left| \int_{x_0}^x f - \int_{x_0}^{x_1} f - (x - x_1) f(x_1) \right| \\
 &= \frac{1}{|x - x_1|} \cdot \left| \int_{x_0}^x f + \int_{x_1}^{x_0} f - \int_{x_1}^x f(x_1) \right| \\
 &= \frac{1}{|x - x_1|} \cdot \left| \int_{x_0}^{x_1} f - \int_{x_1}^x f(x_1) \right| \\
 &= \frac{1}{|x - x_1|} \cdot \left| \int_{x_0}^x (f(x) - f(x_1)) \right| \\
 &\leq \frac{1}{|x - x_1|} \cdot \left| \int_{x_0}^x |f(x) - f(x_1)| \right|
 \end{aligned}$$

On garde les $|$ extérieures pour autoriser les bornes x et x_1 à être "à l'envers"????????

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. puisque f est continue en x_1 , il existe $\eta > 0$ tel que:

$$\forall t \in I, (|t - x_1| < \eta \Rightarrow |f(t) - f(x_1)| \leq \varepsilon)$$

On va donc se placer dans un tel voisinage de x_1 et regarder l'effet de cette majoration sur l'inégalité obtenue précédemment.

Soit $x \in I - \{x_1\}$ tel que $|x - x_1| \leq \eta$. On a alors:

$$\left| \int_{x_0}^x |f(x) - f(x_1)| \right| \leq \left| \int_{x_1}^x \varepsilon \right| = \varepsilon |x - x_1|$$

On a ainsi montré que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I - \{x_1\}, \left(|x - x_1| \leq \eta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| \leq \varepsilon \right)$$

$$\text{C'est-à-dire } \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} \xrightarrow{x \rightarrow x_1} f(x_1)$$

Il ne reste plus qu'à conclure.

Ceci montre que F est dérivable en x_1 , et $F'(x_1) = f(x_1)$.

b) Montrons que F est de classe C^1 par morceaux sur I.

On va travailler sur "tout compact inclus dans I" car I est un intervalle qcq, pas nécessairement fermé, et on a besoin d'un segment pour ?????????

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ et $[a; b] \subset I$.

Puisque f est continue par morceaux sur $[a; b]$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que:

$$\begin{cases} a = a_0 < \dots < a_n = b \\ \text{pour tout } i \in \{0, \dots, n-1\}, \text{ la restriction de } f \text{ à }]a_i; a_{i+1}[\text{ est prolongeable par cont.}^{\text{te}} \text{ sur } [a_i; a_{i+1}] \end{cases}$$

Le résultat précédent montre que F est dérivable sur $[a; b] - \{a_0, \dots, a_n\}$, et que $F'|_{]a_i; a_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité en a_i et a_{i+1} .

Ainsi, F est de classe C^1 par morceaux sur $[a; b]$.

Finalement, on a montré que F est C^1 par morceaux sur tout segment inclus dans I, donc F est C^1 sur I.

B. Démonstration du théorème 2.

La démonstration de ce résultat utilise la Prop.10.

a) Montrons que F est une primitive de f sur I.

D'après ce qui précède, l'application $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f$

est de classe C^1 sur I et on a $F' = f$.

ϕ_0

Donc F est une primitive de f sur I, et f admet au moins une primitive sur I. Soit ϕ_0 une telle primitive.

c) Montrons que pour toute primitive ϕ_0 de f sur I, l'ensemble des primitives de f sur I est: $\{\phi_0 + \lambda; \lambda \in K\}$.

→ Pour tout λ de K, $(\phi_0 + \lambda)$ est une primitive de f sur I puisque $(\phi_0 + \lambda)$ est dérivable sur I et que $(\phi_0 + \lambda)' = \phi_0' = f$.

→ Réciproquement, soit ϕ une primitive de f sur I. Alors $\phi - \phi_0$ est dérivable sur I, et $(\phi - \phi_0)' = \phi' - \phi_0' = f - f = 0$.

Rappel: Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I, dérivable sur $\overset{o}{I}$, et si $\forall x \in \overset{o}{I}, f'(x) = 0$, alors f est constante sur I

Donc $\phi - \phi_0$ est constante, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\phi = \phi_0 + \lambda$.